Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3$, unde q este rația progresiei geometrice	**3p**
	$b_3=2\cdot 3^2=18$	**2p**
2.	$g(7)=0$	**2p**
	$(f\circ g)(7)=f(g(7))=f(0)=7$	**3p**
3.	$2x-1=(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$ și $m_{BM}=1$	**3p**
	$m_{BD}=1$, deci $m_{BD}=m_{BM}$, de unde obținem că punctele B, D şi M sunt coliniare	**2p**
6.	$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=2 \Leftrightarrow 1-\sin 2x=2 \Leftrightarrow \sin 2x=-1$	**3p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $2x=\dfrac{3\pi}{2}$, deci $x=\dfrac{3\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $A(2)=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}$	**3p**
	$A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 6\\ -6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1+2^m+2^n & 2^m+2^n\\ -2^m-2^n & 1-2^m-2^n\end{pmatrix}$, $A(m+n)=\begin{pmatrix}1+2^{m+n} & 2^{m+n}\\ -2^{m+n} & 1-2^{m+n}\end{pmatrix}$, unde m şi n sunt numere naturale	**2p**
	$A(m)\cdot A(n)=A(m+n) \Leftrightarrow 2^{m+n}=2^m+2^n \Leftrightarrow (2^m-1)(2^n-1)=1$ și, cum m şi n sunt numere naturale, obţinem $m=n=1$	**3p**
2.a)	$(-1)*(-1)=(-1)^2+(-1)^2+(-1)+(-1)=$	**3p**
	$=1+1-1-1=0$	**2p**

b)	$x*y=x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+2y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x^2*x^2\le 4\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\le 4\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}$, de unde obținem $x^2+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$	**3p**
	$x\in[-1,1]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}=2(x+2)-\frac{1}{2(x+2)}=\frac{4(x+2)^2-1}{2(x+2)}=$	**3p**
	$=\frac{(2(x+2)-1)(2(x+2)+1)}{2(x+2)}=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{2x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{2}=0$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(-2,-\frac{3}{2}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$	**3p**
	Pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(-\frac{3}{2}\right)$, deci $x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)\ge-\frac{15}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$, de unde obținem $x^2+4x+\frac{15}{4}\ge\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^3(x^2+1)f(x)dx=\int_0^3(x^2+1+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+3x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\frac{27}{3}+9=18$	**2p**
b)	$\int_1^3 xf(x)dx=\int_1^3\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3+\ln(x^2+1)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9-1}{2}+\ln 10-\ln 2=4+\ln 5$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcției f și f este continuă, deci, pentru orice număr real x, $F(x+1)-F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$	**2p**
	$f(t)=1+\frac{2}{t^2+1}>1$, pentru orice număr real t, deci $\int_x^{x+1}f(t)dt\ge\int_x^{x+1}1dt=x+1-x=1$, de unde obținem că $F(x+1)\ge F(x)+1$, pentru orice număr real x	**3p**