Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z = 3 + 2(1 - i)$.

5p **2.** Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$ ştiind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y = (a-1)x + 1$ și $y = 2x - 3$ sunt paralele.

5p **6.** Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(n)) = \dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziţie asociativă $x * y = 4(x + y - 3) - xy$.

5p **a)** Calculaţi $2 * 4$.

5p **b)** Arătați că $x * y = 4 - (x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x - x + 1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 8x + 15}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{2014} (x+3)(x+5) f(x)\,dx = 2014$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) \cdot f'(x)\,dx = -\frac{1}{144}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a > 0$ ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.