COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ TUDOR VIANU

Str. Arhitect Ion Mincu nr.10, sector 1, Bucureşti, România
Tel/fax 021222 66 70; http://www.lbi.ro ; email: lbi@lbi.ro

Colegiul Naţional de Informatică „Tudor Vianu"

Concursul „Micii campioni" – 2021

Ziua 1, 6 iulie 2021

1. Se ştie că: $\overline{aaa} \times a + \overline{aa} \times a + \overline{aaa} : a - \overline{aa} + a : a = 2020$. Determinaţi cifra a.

Soluţie şi barem:

Relaţia din enunţ este echivalentă cu $122 \times a \times a - 11 \times a = 1908$ 5p

Deducem că cifra a este pară..2p

Dacă $a = 2$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a + 112 = 466 < 1908$ 2p

Dacă $a \geq 6$, rezultă că $122 \times a \times a - 11 \times a > 122 \times 6 \times 6 - 99 > 1908$ 4p

Pentru $a = 4$, relaţia din enunţ se verifică..2p

2. Trei elevi joacă ping-pong. După fiecare joc, elevul învins este înlocuit de elevul care nu a participat la acel joc. La final s-a constatat că unul dintre elevi a jucat 13 jocuri, iar altul a jucat 27 de jocuri. Jocurile desfăşurate s-au numerotat, în ordine, cu 1, 2, 3, ..., n, unde n este numărul total de jocuri.

a) Determinaţi numărul n.

b) La câte jocuri a participat cel de-al treilea elev?

c) La câte jocuri a participat elevul care a pierdut jocul cu numărul 2 ?

Soluţie şi barem:

a) Fiecare elev participă la cel puţin unul dintre două jocuri consecutive. Deoarece unul dintre jucători a participat la 13 jocuri înseamnă că numărul total de jocuri nu depăşeşte $2 \cdot 13 + 1 = 27$.
....3p

Cum unul dintre elevi a participat la 27 jocuri, rezultă că numărul total de jocuri desfăşurate este $n = 27$ 3p

b) Deci, al treilea jucător a participat la $27 - 13 = 14$ jocuri..................5p

c) Jucătorul care a jucat 27 jocuri le-a câştigat pe toate. 2p

Cum jucătorul care a pierdut prima partidă a jucat 14 jocuri, deducem că jucătorul care a participat la 13 jocuri a pierdut a doua partidă......................................2p

3. Determinaţi cifrele a, b, c, d pentru care $\overline{abcd}+\overline{abc}=2021$.

Soluţie şi barem:

$\overline{abcd}+\overline{abc}=2021$ este echivalent cu $11\cdot\overline{abc}+d=2021$. 5p

Deoarece $d<11$, rezultă că d este restul împărţirii lui 2021 la 11..............5p

Cum $2021=11\cdot 133+8$, rezultă că $a=1, b=8, c=3, d=8$ 5p

4. Doi prieteni s-au angajat să efectueze o lucrare de lungă durată. Ei au început lucrarea la data de 1 ianuarie 2020. Fiecare zi a fiecărui an este considerată zi lucrătoare. Unul dintre prieteni are o zi de odihnă după fiecare trei zile consecutive lucrate, iar celălalt are trei zile de odihnă după fiecare şapte zile consecutive lucrate. Determinaţi ziua calendaristică a anului 2024 în care cei doi prieteni au prima zi de odihnă comună.

Soluţie şi barem:

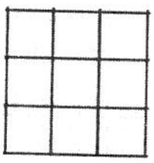
De la 1 ianuarie 2020 până la 31decembrie 2023 (inclusiv) sunt $366+3\cdot 365=1461$ zile...3p

Cei doi prieteni au grafice de lucru cu perioade de 4 zile şi respectiv 10 zile.......................3p

Deoarece $1461=4\cdot 365+1$ şi $1461=10\cdot 146+1$, rezultă că , pentru ambii prieteni, ziua de 31decembrie 2023 este prima zi de lucru după o zi de odihnă comună...............................7p

Rezultă că prima zi de odihnă comună din anul 2024 este 7 ianuarie.................................2p

5. Doi elevi, Andrei şi Bogdan, desenează pe tablă tabloul de mai jos şi propun următorul joc.



Începând cu Andrei, alternativ,fiecare dintre ei scrie într-un pătrăţel liber al tabloului un număr de la 1 la 9. (Fiecare număr se scrie o singură dată). Câştigă jucătorul care completează primul ultimul pătrăţel liber al unei linii sau coloane astfel încât numerele scrise pe acea linie sau coloană să aibă suma egală cu 15.

Arătaţi că unul dintre cei doi elevi poate câştiga de fiecare dată. Care este acesta şi explicaţi strategia lui de câştig.

Soluţie şi barem:

Vom arăta că jucătorul care începe jocul (Andrei) câştigă..........................1p
Andrei observă că:

- dacă el scrie un număr într-un pătrăţel acesta se află la intersecţia unei linii cu o coloană;
- dacă el găseşte un număr pentru care există cel puţin trei perechi de numere cu care reuşeşte să completeze cele trei pătrăţele de pe linia/coloana respectivă cu suma 15, câştigă;
- $15=8+(6+1)=8+(5+2)=8+(4+3)\neq 8+(7+9)$ 7p

Prin urmare, dacă el începe cu 8, are la dispoziţie trei perechi de numere care sunt „bune” $(6,1),(5,2),(4,3)$ şi o pereche „rea” $(7,9)$ 3p

De exemplu:

Andrei scrie cifra 8 în pătrăţelul din centrul tablei. Dacă Bogdan scrie un număr într-un pătrăţel al tablei, atunci Andrei scrie în pătrăţelul simetric faţă de centru numărul din perechea corespunzătoare. Cum cel mult cele două diagonale pot fi complelate cu suma 15, rezultă că cel puţin o linie/coloană va fi completată de Andrei cu suma 15.................4p