11.05.2023

Colegiul Naţional de Informatică ,,Tudor Vianu"
Concursul ,,Micii Campioni" – 2023
Ziua 1

Problema 1. Mihai a început să citească o carte pe 1 martie. În fiecare zi el a citit acelaşi număr de pagini şi a terminat cartea pe 31 martie. Dacă în prima zi el ar fi citit de 4 ori mai puţine pagini şi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, el ar fi terminat cartea tot pe 31 martie. Determinaţi câte pagini are cartea.

Soluţie şi barem orientativ Notăm cu x numărul de pagini pe care îl citeşte în fiecare zi. Atunci $x = 4a$, unde a este numărul de pagini pe care l-ar citi în prima zi, în a doua situaţie **2p**

$31x = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+30)$ **4p**

$31 \cdot 4a = 31 \cdot a + (1 + 2 + \cdots + 30)$ **3p**

$31 \cdot 4a = 31 \cdot a + 31 \cdot 15 \Rightarrow 4a = a + 15 \Rightarrow a = 5$ **4p**

$x = 20 \Rightarrow$ cartea are $31 \cdot 20 = 620$ de pagini **2p**

Problema 2. La un test de matematică, ce conţine patru probleme, au participat 26 de elevi. Dintre ei, 22 au rezolvat prima problemă, 21 au rezolvat a doua problemă, 20 a treia problemă şi 19 a patra problemă. Arătaţi că cel puţin 4 elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Soluţie şi barem orientativ

$26 - 22 = 4$ elevi nu au rezolvat prima problemă **2p**

$26 - 21 = 5$ elevi nu au rezolvat a doua problemă **2p**

$26 - 20 = 6$ elevi nu au rezolvat a treia problemă **2p**

$26 - 19 = 7$ elevi nu au rezolvat a patra problemă **2p**

Numărul elevilor care nu au rezolvat toate problemele este cel mult egal cu $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ **4p**

Cum $26 - 22 = 4$, rezultă că cel puţin 4 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme **3p**

Problema 3. Cu cifrele $0, 1, 2$ şi 3 sunt formate toate numerele de trei cifre cu cifre diferite. Calculaţi suma tuturor acestor numere.

Soluţie şi barem orientativ

Observaţie: Toate numerele de trei cifre, cu cifre distincte, formate cu $0, 1, 2$ şi 3 sunt în număr de $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. (prima cifră nu poate fi 0)

Fiecare din cifrele $1, 2$ şi 3 apare ca cifră a sutelor în 6 numere **3p**

Fiecare din cifrele $1, 2$ şi 3 apare ca cifră a zecilor şi ca cifră a unităţilor în 4 numere **5p**

Rezultă că suma acestor numere va fi:

$6 \cdot (300 + 200 + 100) + 4 \cdot (30 + 20 + 10) + 4 \cdot (3 + 2 + 1) = 3864$ **7p**

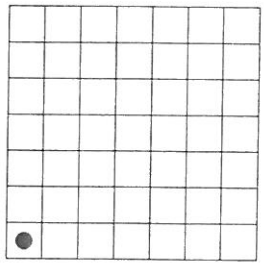
Problema 4. În pătrăţelele unui tablou 10×10 se aşează în mod arbitrar numerele de la 1 la 100 (în fiecare pătrăţel se aşează un singur număr). Notăm cu $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$ sumele numerelor situate în coloanele tabloului. Se poate ca printre numerele $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$ oricare două vecine să difere între ele exact cu 1? Justificaţi răspunsul. (S_1 are vecin pe S_2, S_2 are vecini pe S_1 şi S_3, ..., S_9 are vecini pe S_8 şi S_{10}, S_{10} are vecin pe S_9)

Soluţie şi barem orientativ Vom demonstra că nu există o aşezare a numerelor în tablou cu proprietatea din enunţ. Presupunem contrariul. Rezultă că s-a reuşit aşezarea cerută. Atunci, fiindcă sumele numerelor de pe coloane vecine diferă cu o unitate, în cinci coloane sumele sunt pare iar în celelalte cinci coloane sumele sunt impare **7p**

Prin urmare, $S_1 + S_2 + \cdots + S_{10}$ este număr impar **6p**

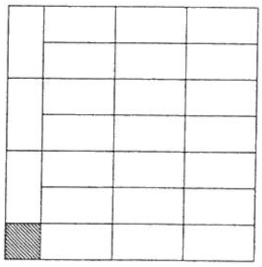
Dar $S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = 1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$, număr par, ajungem la o contradicţie **2p**

Problema 5. Se consideră o tablă 7×7 ca în figură. În colţul din stânga jos se află o fisă. Doi elevi Andrei şi Bogdan mută alternativ fisa în unul dintre pătrăţelele vecine cu cel în care este fisa. (Două pătrăţele sunt vecine dacă au o latură comună) Pierde acel elev, după mutarea căruia fisa ajunge într-un pătrăţel în care a mai fost. Ştiind că Andrei mută primul fisa, arătaţi că unul dintre elevi are o strategie cu care câştigă de fiecare dată. Care este aceasta? Justificaţi răspunsul.



Soluţie şi barem orientativ Vom arăta că Bogdan are o strategie cu care câştigă întotdeauna.

Împărţim toate pătrăţelele tablei, cu excepţia celui din colţul stânga jos, în perechi, aşa cum se vede în figura alăturată **6p**



La fiecare mutare a lui Andrei prin care ajunge într-un pătrăţel, Bogdan mută fisa în pătrăţelul din perechea formată **7p**

Astfel Bogdan are întotdeauna mutare de răspuns, deci el câştigă **2p**

Orice soluţie alternativă completă a oricărei probleme va primi punctaj maxim. Orice soluţie alternativă incompletă va fi punctată corespunzător.