1. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 - 7x + 10 = 0$ este: **(9 pct.)**

   a) $\{1;4\}$; b) $\{1;2\}$; c) $\{3;5\}$; d) $\{4;5\}$; e) $\{2;5\}$; f) $\{5;6\}$.

   **Soluţie.** Ecuaţia de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) are rădăcinile reale $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ doar dacă $\Delta \equiv b^2 - 4ac \geq 0$. În cazul ecuaţiei din enunţ obţinem $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 \geq 0$, iar cele două rădăcini reale (distincte, deoarece $\Delta \neq 0$) sunt $x_{1,2} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm 3}{2}$, deci $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{2, 5\}$. ⓔ

2. Să se determine mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{1-5x} + x = 1$. **(9 pct.)**

   a) $\{-1;1\}$; b) $\{1;3\}$; c) $\{-3;0\}$; a) $\{3;4\}$; e) $\{-2;1\}$; f) $\{-1;0\}$.

   **Soluţie.** Condiţia de existenţă a radicalului se scrie $1-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}$. ecuaţia din enunţ şi pozitivitatea radicalului implică $\sqrt{1-5x} = 1 - x \geq 0$, deci $x \leq 1$. Din cele două inegalităţi obţinute rezultă $x \leq \frac{1}{5}$. Ridicând ecuaţia la pătrat, se obţine $1 - 5x = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 0\}$. Ambele variante convin, deoarece $-3 \leq \frac{1}{3}$ şi $0 \leq \frac{1}{3}$. Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{-3, 0\}$. ⓒ

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$, unde $a$, $b$ sunt numere reale. Presupunem că funcţia $f$ admite trei puncte de extrem local şi are asimptota $y = x + 2$. Atunci **(9 pct.)**

   a) $a + b > 7$; b) $ab = 6$; c) $a + b \in (6, 7)$; d) $ab \in (6, 7)$; e) $ab = \frac{1}{4}$ f) $a + b \in (5, 6)$.

   **Soluţie.** Examinăm condiţiile care permit existenţa unei asimptote oblice pentru funcţia $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2+1}}$. Calculăm limita

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+ax+b}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2})}{x\cdot|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \pm 1.$$

   Se constată că pentru $x \to -\infty$ limita este egală cu $-1$, diferită de panta 1 a dreptei din enunţ $y = x+2$, deci cazul $x \to -\infty$ nu permite asimptota propusă. Rămâne de examinat doar cazul $x \to \infty$, caz în care limita este 1, egală cu panta dreptei propuse în calitate de asimptotă oblică, $y = x + 2$. Calculăm a doua limită, unde folosim amplificarea cu conjugata pentru raţionalizarea numărătorului,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) - 1\cdot x &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2+1}} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+b-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+ax+b)^2 - (x\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+ax+b+x\sqrt{x^2+1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax^3 + x^2(a^2+2b-1) + x\cdot 2ab + b^2}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+ax+b+x\sqrt{x^2+1})}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left[2a+\frac{1}{x}(a^2+2b-1)+\frac{1}{x^2}\cdot 2ab+\frac{1}{x^3}\cdot b^2\right]}{x^3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\cdot a+\frac{1}{x^2}\cdot b)} = \frac{2a}{2} = a.\end{aligned}$$

   Această valoare coincide cu termenul liber 2 al asimptotei din enunţ $y = x + 2$ doar dacă $a = 2$. În concluzie, funcţia $f$ admite asimptota oblică $y = x + 2$ doar dacă $a = 2$. Pentru a studia punctele de extrem ale funcţiei $f$, studiem derivata acesteia:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+2x+b)}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(2x+2)(x^2+1) - x(x^2+2x+b)}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{x^3+(2-b)x+2}{(\sqrt{x^2+1})^3}.$$

   Punctele posibile de extrem ale lui $f$ se află printre rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$, care sunt exact rădăcinile numărătorului $P(x) = x^3 + (2-b)x + 2$. Se observă că pentru $b = 2$, ecuaţia $P(x) = 0$ are doar o rădăcină reală ($x = -\sqrt[3]{2}$), deci valoarea $b = 2$ nu convine. Cerinţa din enunţ (3 puncte de extrem local pentru $f$) necesită anularea numărătorului $P(x)$ în trei puncte distincte, deci necesită două rădăcini distincte pentru ecuaţia $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2 - b = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}(b-2)$, ceea ce este posibil doar dacă $b - 2 > 0 \Leftrightarrow b > 2$, caz în care rădăcinile derivatei $P'$ sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{b-2}{3}} < x_2 = \sqrt{\frac{b-2}{3}}$. Observăm

[1] Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2023 la facultăţile: ETTI, AC.

că numitorul fracţiei $f'(x) = \frac{P(x)}{(\sqrt{x^2+1})^3}$ este strict pozitiv. Pentru a asigura existenţa celor trei puncte de anulare pentru $P$, trebuie asigurată alternanţa semnelor valorilor

$$\{\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty, \quad P(x_1) = P(-\sqrt{\tfrac{b-2}{3}}), \quad P(x_2) = P(\sqrt{\tfrac{b-2}{3}}), \quad \lim_{x\to\infty} P(x) = +\infty\}.$$

Dar $P\left(\pm\sqrt{\frac{b-2}{3}}\right) = 2 \mp \frac{2}{3\sqrt{3}}(b-2)^{3/2}$ şi $P(x_1) = 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}(b-2)^{3/2} > 0$ (adevărat), deci avem succesiunea de semne $(-, +, \text{sign}\,(P(x_2)), +)$. Asigurarea existenţei celor 3 rădăcini pentru $f'$ (puncte de extrem pentru $f$) revine la alternarea celor patru semne, deci impunem $P(x_2) = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}(b-2)^{3/2} < 0$, care se rescrie $2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}(b-2)^{3/2} < 0 \Leftrightarrow 2 < \frac{2}{3\sqrt{3}}(b-2)^{3/2} \Leftrightarrow (b-2)^{3/2} > 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{b-2} > \sqrt{3} \Leftrightarrow b-2 > 3$, deci $b > 5$. Dar $a = 2$, deci obţinem $a + b > 7$ (a)

4. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie: $x*y = 2xy - 10x - 10y + 55$. Să se determine suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de } 2024 \text{ ori } x} = \frac{11}{2}$. **(9 pct.)**

   a) 9; b) 12; c) 13; d) 14; e) 10; f) 11.

   **Soluţie.** Se observă că regula de compoziţie se poate scrie $x*y = 2xy - 10x - 10y + 55 = 2x(y-5) - 10(y-5) + 5 = 2(x-5)(y-5) + 5$. Se verifică uşor că legea este asociativă şi comutativă, iar $x * x = 2(x-5)^2 + 5$ şi $x * x * x = (x * x) * x = 2[2(x-5)^2 + 5 - 5](x-5) + 5 = 2^2(x-5)^3 + 5$. Mai general, se poate uşor verifica prin inducţie că $\underbrace{x * \cdots * x}_{n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-5)^n + 5$, $\forall x \geq 1$. Atunci $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de } 2024 \text{ ori } x} = 2^{2023}(x-5)^{2024} + 5$, iar egalitatea din enunţ se rescrie $2^{2023}(x-5)^{2024} + 5 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow [2(x-5)]^{2024} = 1 \Leftrightarrow 2(x-5) \in \{\pm 1\}$. Distingem cazurile: (i) dacă $2(x-5) = -1$, atunci obţinem soluţia $x_1 = \frac{9}{2}$; (ii) dacă $2(x-5) = 1$, atunci obţinem soluţia $x_2 = \frac{11}{2}$. Prin urmare, $x_1 + x_2 = \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = 10$. (e)

5. Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = aX^{2024} + bX^{2023} + 2X^3 + cX^2 + 7X - 3$. Dacă $P$ este divizibil prin $X^2 + 1$ şi restul împărţirii lui $P$ la $X + 1$ este 3, să se calculeze $P(1)$. **(9 pct.)**

   a) $-14$; b) 15; c) 27; d) 36; e) 21; f) 31.

   **Soluţie.** Ţinând cont de faptul că $P \in \mathbb{R}[x]$ şi folosind teorema de împărţire cu rest, cele două condiţii din enunţ se rescriu:

$$\begin{cases} P \,\vdots\, (X^2+1) \\ P(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(i) = 0 \\ P(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-c-3) + i(-b+5) = 0 \\ a - b + c - 12 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 3 \\ b = 5 \\ a - b + c = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 23/2 \\ b = 5 \\ c = 17/2, \end{cases}$$

   deci $a + b + c + 6 = 31$. (f)

6. Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{R}$, numerele 4, $2x+3$ şi 10 (în această ordine) formează o progresie aritmetică. **(9 pct.)**

   a) $x = -4$; b) $x = 1$; c) $x = -2$; d) $x = 3$; e) $x = 2$; f) $x = 4$.

   **Soluţie.** Termenul din mijloc trebuie să fie media aritmetică a celorlalţi doi termeni, deci obţinem $\frac{4+10}{2} = 2x + 3 \Leftrightarrow 4x + 6 = 14 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$. (e)

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$. **(9 pct.)**

   a) $x = 0;\ y = 3$; b) $x = 3;\ y = 4$; c) $x = 0;\ y = 1$; d) $x = 1;\ y = 1$; e) $x = 3;\ y = 2$; f) $x = 1;\ y = -1$.

   **Soluţie.** Adunând ecuaţiile sistemului, rezultă $2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Scăzând ecuaţiile, obţinem $2y = 4 \Rightarrow y = 2$. Deci soluţia sistemului este $x = 3, y = 2$. (e)

8. Soluţia ecuaţiei $9^{x+1} = 81$ este: **(9 pct.)**

   a) $x = -3$; b) $x = 1$; c) $x = 2$; d) $x = -1$; e) $x = 0$; f) $x = -2$.

   **Soluţie.** Ecuaţia se rescrie $9^{x+1} = 9^2$. Logaritmând ecuaţia în baza 9, obţinem $x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$. (b)

9. Să se calculeze $\ell = \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^\alpha \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} dx$. **(9 pct.)**

a) $\ell = \frac{\pi}{3}$; b) $\ell = \operatorname{arctg} 2$; c) $\ell = \frac{\pi}{2}$; d) $\ell = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$; e) $\ell = \operatorname{arctg} 3$; f) $\ell = \frac{\pi}{4}$.

**Soluţie.** Descompunem integrandul raţional: $\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}$. Obţinem $2x+1 = (ax+b)(x^2+2x+2) + (cx+d)(x^2+1)$, de unde, identificând coeficienţii monoamelor $x^3, x^2, x, 1$ respectiv, obţinem sistemul $\begin{cases} a+c=0 \\ b+2a+d=0 \\ 2b+2a+c=2 \\ 2b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \\ d=-1 \end{cases}$, deci

$$\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+2x+2}$$

şi prin urmare

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} dx &= \int_0^\alpha \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+2x+2} \right) dx \\ &= \int_0^\alpha \left( \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{(x+1)^2+1} \right) dx = (\operatorname{arctg} x)\big|_0^\alpha - (\operatorname{arctg}(x+1))\big|_0^\alpha \\ &= (\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} 0) - (\operatorname{arctg}(\alpha+1) - \operatorname{arctg} 1) = \operatorname{arctg} \alpha - \left( \operatorname{arctg}(\alpha+1) - \tfrac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

şi deci $\ell = \lim_{\alpha \to \infty} \left[ \operatorname{arctg} \alpha - \left( \operatorname{arctg}(\alpha+1) - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{2} - \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$. (f)

10. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 3x^2$. Să se calculeze $f'(1)$. **(9 pct.)**

a) 6; b) 7; c) 8; d) 10; e) 9; f) 11.

**Soluţie.** Derivând funcţia $f$, obţinem $f'(x) = (x^4+3x^2)' = 4x^3 + 6x$, deci $f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 10$. (d)