1. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : 2x+y-3=0$ şi $d_2 : x+2y-3=0$. Dacă $y=a_1x+b_1$ şi $y=a_2x+b_2$, cu $a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2 \in \mathbb{R}$ sunt ecuaţiile celor două drepte bisectoare ale unghiurilor rezultate din intersecţia dreptelor d_1 şi d_2, atunci suma $S=b_1+b_2$ este: **(9 pct.)**

   a) 3; b) 2; c) 0; d) 1; e) 5; f) -3.

   Soluţie. Considerăm un punct $M(x,y)$ pe reuniunea $\mathcal{R}$ a celor doua bisectoare, deci

$$d(M,d_1)=d(M,d_2) \Leftrightarrow \tfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\tfrac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow |2x+y-3|=|x+2y-3| \Leftrightarrow 2x+y-3=\pm(x+2y-3)$$
$$\Leftrightarrow [\ 2x+y-3=x+2y-3\ ] \text{ sau } [\ 2x+y-3=-(x+2y-3)\ ] \Leftrightarrow (y=x) \text{ sau } (y=-x+2),$$

   deci $S=b_1+b_2=0+2=2$. (b)

   Altfel. Reuniunea $\mathcal{R}$ a celor doua drepte bisectoare este mulţimea punctelor (x,y) egal depărtate de cele două drepte d_1 şi d_2 din enunţ şi care satisfac ecuaţii de forma $y=mx+n$ sau $x=p$. Se verifică uşor că al doilea caz se referă la puncte de forma $P(p,y)$ care, fiind echidistante faţă de d_1 şi d_2, satisfac egalitatea $d(P,d_1)=d(P,d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=p \\ 2p+y-3=0 \\ p+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=p \Rightarrow (x,y)=(p,p)$, deci o asemenea bisectoare nu poate exista (se reduce la un punct). Prin urmare, ambele bisectoare au câte o ecuaţie de forma $y=mx+n$. Orice punct al reuniunii $\mathcal{R}$ este deci de forma $(x,y)=(x,mx+n)$ şi este egal depărtat de cele două drepte d_1 şi d_2, deci satisface egalitatea $\frac{|2x+(ax+b)-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|x+2(ax+b)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$. Ridicând egalitatea la pătrat, obţinem $[x(a+2)+(b-3)]^2=[x(1+2a)+(2b-3)]^2 \Leftrightarrow x^2[(a+2)^2-(1+2a)^2]+x[(a+2)(b-3)-(1+2a)(2b-3)]+[(b-3)^2-(2b-3)^2]$, egalitate care trebuie să aibă loc pentru toate punctele bisectoarei, deci pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin urmare polinomul în nedeterminata x obţinut trebuie să fie identic nul. Din anularea celor trei coeficienţi rezultă următorul sistem în necunoscutele a şi b: $\begin{cases} -3a^2+3=0 \\ 3ab-3a+3=0 \\ -3b^2+6b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in\{\pm1\} \\ a(b-1)=-1 \\ b\in\{0,2\} \end{cases}$. Distingem două cazuri: (i) dacă $a=a_1=-1$, atunci sistemul devine $\begin{cases} b=2 \\ b\in\{0,2\} \end{cases}$, deci $b=b_1=2$; (ii) dacă $a=a_2=1$, atunci sistemul devine $\begin{cases} b=0 \\ b\in\{0,2\} \end{cases}$, deci $b=b_2=0$. Se observă perpendicularitatea celor două bisectoare $(a_1\cdot a_2=1\cdot(-1)=-1)$. De asemenea, concluzionăm că $S=b_1+b_2=2+0=2$.

2. Valoarea parametrului real m pentru care punctul $P(0,m)$ aparţine dreptei de ecuaţie $d : 2x+y=1$ este: **(9 pct.)**

   a) 0; b) $-\frac{1}{2}$; c) -1; d) 1; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Punctul $P(0,m)$ aparţine dreptei d dacă şi numai dacă $(0,m)$ satisfac ecuaţia dreptei, $2x+y=1$, deci dacă $2\cdot 0+m=1 \Rightarrow m=1$. (d)

3. Dacă $\operatorname{tg}\alpha=1$, atunci valoarea expresiei $E=\cos\alpha-\sin\alpha$ este: **(9 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. Folosind în egalitatea din enunţ relaţia $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, rezultă $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1 \Rightarrow \sin\alpha=\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha-\sin\alpha=0$. (c)

4. Valoarea expresiei $E=\sin\alpha\cdot\cos(3\alpha)$ pentru $\alpha=30^\circ$ este: **(9 pct.)**

   a) 1; b) -1; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 0.

   Soluţie. Înlocuind $\alpha=30^\circ$ în expresie, obţinem $E=\sin 30^\circ\cdot\cos(3\cdot 30^\circ)=\sin 30^\circ\cdot\cos 90^\circ=\frac{1}{2}\cdot 0=0$. (f)

[1] Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2023 la facultea ETTI.

5. În reperul cartezian xOy, punctele $A(0,0)$ şi $B(6,8)$ reprezintă vârfuri ale triunghiului echilateral ABC. Dacă vârful C este situat în al doilea cadran, atunci ordonata acestuia este: **(9 pct.)**

   a) $1+\sqrt{10}$; b) $4+3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{10}$; d) 5; e) $4-3\sqrt{3}$; f) 10;.

   Soluţie. Vârful C al triunghiului echilateral, fiind egal depărtat de vârfurile A şi B, se află pe mediatoarea d a segmentului AB. Aceasta trece prin mijlocul $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}) = (\frac{0+6}{2}, \frac{0+8}{2}) = (3,4)$ şi are panta $m = \frac{-1}{m_{AB}} = -(\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A})^{-1} = -(\frac{8-0}{6-0})^{-1} = -\frac{3}{4}$, deci avem

$$d:\ (y-y_M = m(x-x_M) \Leftrightarrow y-4 = -\frac{3}{4}(x-3) \Leftrightarrow 3x+4y=25 \Leftrightarrow x = \frac{25-4y}{3}$$

   şi deci coordonatele punctului C sunt de forma $C(\frac{25-4y}{3}, y)$. Segmentele AC şi AB fiind egale, avem

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\\ &\quad\Leftrightarrow \sqrt{(\tfrac{25-4y}{3}-6)^2+(y-8)^2} = \sqrt{6^2+8^2} \Leftrightarrow (\tfrac{25-4y}{3}-6)^2+(y-8)^2 = 100\\ &\quad\Leftrightarrow 25y^2-200y-275=0 \Leftrightarrow y^2-8y-11=0 \Leftrightarrow y\in\{4\pm3\sqrt{3}\}.\end{aligned}$$

   Punctul C trebuie să se afle, conform enunţului, în cadranul 2, deci trebuie să aibă ordonata pozitivă şi abscisă negativă. Prin urmare valoarea negativă obţinută $4-3\sqrt{3}<0$ nu convine, şi se acceptă ca fiind corectă valoarea pozitivă, deci $y = 4+3\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x = \frac{25-4y}{3} = 3-4\sqrt{3} < 0$ şi deci ordonata căutată este $4+3\sqrt{3}$. (b)

   Altfel. Lungimea laturii AB este $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(6-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$. Punctul C este egal depărtat de vârfurile A şi B, deci:

$$\begin{cases} AC = AB\\ BC = AB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 10\\ \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2} = 10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100\\ (x-6)^2+(y-8)^2 = 100,\end{cases}$$

   deci $\begin{cases} x^2+y^2=100\\ x^2+y^2-12x-16y=0\end{cases}$. Făcând diferenţa celor două ecuaţii, obţinem $12x+16y=100 \Leftrightarrow 3x+4y=25 \Leftrightarrow x = \frac{25-4y}{3}$. Înlocuind expresia obţinută pentru x în prima ecuaţie a sistemului, obţinem $\left(\frac{25-4y}{3}\right)^2+y^2 = 100 \Leftrightarrow 25y^2-200y-275=0 \Leftrightarrow y^2-8y-11=0 \Leftrightarrow y\in\{4\pm3\sqrt{3}\}$. Punctul C trebuie să se afle, conform enunţului, în cadranul 2, deci trebuie să aibă ordonata pozitivă $(y\geq 0)$ şi abscisa negativă $(x\leq 0)$. Prin urmare valoarea negativă obţinută $4-3\sqrt{3}<0$ nu convine, şi se acceptă ca fiind corectă valoarea pozitivă, $y=4+3\sqrt{3}$. Observăm că abscisa asociată este $x = \frac{25-4y}{3} = \frac{25-4\cdot(4+3\sqrt{3})}{3} = 3-4\sqrt{3} < 0$, deci s-a obţinut vârful $C(3-4\sqrt{3}, 4+3\sqrt{3})$ a cărui ordonată este $4+3\sqrt{3}$.

6. Lungimea laturii unui pătrat cu diagonala $d = 2\sqrt{2}$ este: **(9 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 2; d) $\sqrt{2}$; e) 1; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. Dacă latura pătratului are lungimea ℓ, atunci diagonala are lungimea $\ell\sqrt{2}$, deci are loc egalitatea $2\sqrt{2} = \ell\sqrt{2}$, de unde rezultă $\ell = 2$. (c)

7. În reperul $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$ este: **(9 pct.)**

   a) $5\vec{i}-\vec{j}$; b) $3\vec{i}-2\vec{j}$; c) $-\vec{i}-4\vec{j}$; d) $\vec{i}-\vec{j}$; e) $\vec{i}$; f) $4\vec{i}-5\vec{j}$.

   Soluţie. Prin înlocuirea vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ în expresia vectorului $\vec{w}$, rezultă $\vec{w} = \vec{u}+2\vec{v} = (\vec{i}-3\vec{j})+2(2\vec{i}+\vec{j}) = 5\vec{i}-\vec{j}$. (a)

8. Aria triunghiului dreptunghic ABC cu $m\left(\widehat{BAC}\right) = 90°$, $m\left(\widehat{ABC}\right) = 60°$ şi $AB = 1$ este: **(9 pct.)**

   a) $\sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Din enunţ rezultă că triunghiul este dreptunghic, BC este ipotenuză, iar AC şi $AB=1$ sunt catete. Atunci $\frac{AC}{AB} = \operatorname{tg}\widehat{ABC} \Leftrightarrow AC = \operatorname{tg}60°\cdot AB \Leftrightarrow AC = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$. Deci aria triunghiului este $\frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (c)

9. În reperul $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ fie vectorii $\vec{OA} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{OB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{OC} = m\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{OD} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Valoarea parametrului real m pentru care $ABCD$ este paralelogram este: **(9 pct.)**

a) 0; b) -3; c) -2; d) 2; e) 3; f) 1.

Soluţie. Avem $A(-2,2), B(4,3), C(m,-1), D(-3,-2)$, iar $ABCD$ este paralelogram doar dacă două laturi opuse sunt paralele şi egale. Alegând de exemplu perechea de laturi AB şi CD, egalitatea pantelor dreptelor suport conduce la: $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{y_D-y_C}{x_D-x_C} \Leftrightarrow \frac{3-2}{4-(-2)} = \frac{-2-(-1)}{-3-m} \Leftrightarrow -3-m = -6 \Leftrightarrow m = 3$. Observăm că dreptele AB şi CD sunt distincte: de exemplu, A, B, D sunt necoliniare, deoarece $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$. Deci valoarea $m = 3$ asigură paralelismul celor două drepte. În plus, pentru $m = 3$, are loc şi egalitatea celor două laturi. Într-adevăr, avem:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{37} \\ CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{37}. \end{cases}$$

Deci valoarea $m = 3$ asigură proprietatea de a fi paralelogram pentru patrulaterul $ABCD$. **e**

Altfel. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă A, B, D sunt necolineare şi avem $\frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D)$. Necoliniaritatea se arată uşor, ca în soluţia de mai sus. Avem

$$\frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B+D) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(-2,2)+(m,-1)] = \frac{1}{2}[(4,3)+(-3,-2)] \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m-2,1) = \frac{1}{2}(1,1) \Leftrightarrow m-2 = 1,$$

deci $m = 3$.

10. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-2)$ şi $B(5,1)$. Lungimea segmentului $[AB]$ este: **(9 pct.)**

a) 5; b) $\sqrt{7}$; c) $\sqrt{5}$; d) 25; e) $\sqrt{3}$; f) 3.

Soluţie. Lungimea segmentului $[AB]$ este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. **a**